



暨南大学
JINAN UNIVERSITY

2022 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

招生专业与代码: 070201 理论物理, 070205 凝聚态物理, 070207 光学, 0702Z1 计算物理

考试科目名称及代码: 601 高等数学(B)

考生注意: 所有答案必须写在答题纸(卷)上, 写在本试题上一律不给分。

本试卷为 150 分, 考试时间为 3 小时

一 单项选择题(共 7 小题, 每小题 3 分, 共 21 分)

- 1 当 $x \in (-1, 1)$ 时, $|f(x)| \leq 1 - \cos x$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处 ()
- A. 左导数存在右导数不存在 B. 左导数不存在右导数存在
C. 可导 D. 左导数与右导数均存在, 但不相等
- 2 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必收敛的级数为 ()
- A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$
C. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$
- 3 设 Σ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 外侧, 则 $\oiint_{\Sigma} z^2 dx dy =$ ()
- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. π D. 0
- 4 设三阶矩阵 A 满足: $|2A + E| = 0, |A - E| = 0, |A + E| = 0$, 则 $|A^{-1} - A + E| =$ ()
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{3}$
- 5 $\int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin x} dx =$ ()
- A. 0 B. π C. $\frac{1}{\pi}$ D. 2
- 6 下面广义积分

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx ; \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx ; \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx ; \quad \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$$

其中收敛的个数有 ()

- A. 1个; B. 2个; C. 3个; D. 4个.

7 已知函数 $y = x^2, x \in [-1, 1]$ 的傅里叶级数为 $\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} =$ ()

- A. $-\frac{\pi^2}{12}$ B. $-\frac{\pi^2}{6}$ C. $\frac{\pi^2}{6}$ D. $\frac{\pi^2}{12}$

二 填空题 (共 7 小题, 每题 4 分, 共 28 分)

1 三阶矩阵 A 的秩为 2, $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 是非齐次方程组 $Ax = b$ 的两个特解,

则该非齐次方程组的通解为 _____。

2 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}} =$ _____。

3 设 $f(x)$ 连续可微, 且满足 $f(x) = \int_0^x e^{-f(t)} dt$, 则 $f(x) =$ _____。

4 计算曲线积分 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds =$ _____, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 。

5 $f(x) = \frac{1}{3-x}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数是 _____。

6 曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 在 $t=1$ 的点处的法平面方程为 _____。

7 设函数 $u(x, y, z) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{18}$, 单位向量 $n = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{(1,2,3)} = \text{_____}。$$

三 计算题 (共 8 小题, 每小题 10 分, 共 80 分)

1 求 $\int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x} dx$ 。

2 求通过两个平面 $2x+y-z-2=0, 3x-2y-2z+1=0$ 的交线, 且与平面 $3x+2y+3z-6=0$ 垂直的平面方程。

3 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ -x_1 + 4x_2 + mx_3 = k \end{cases}$$

有无穷多解, 求 m, k 的值, 并求出方程组的通解。

4 求 $\iint_{\Sigma} xz^2 dydz - \sin x dx dy$, 其中 Σ 是由曲线 $\begin{cases} y = \sqrt{1+z^2} \\ x = 0 \end{cases} (1 \leq z \leq 2)$ 绕 z 轴旋转而成的旋转面, 其法线向量与 z 轴正向的夹角为锐角。

5 求微分方程 $y'' + y = x + \sin x$ 的通解。

6 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (|x| - y + |z|) dv$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + z^2 \leq 1, |y| \leq 2\}$ 。

7 求 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n-1)4^{2n-1}}$ 的和函数。

8 计算 $\int_L (xe^x + 5x^2y^3 + x)dx - (3x^5 + \sin y)dy$, 其中 L 为点 $A(-1, 0)$ 到 $B(1, 0)$ 的上半圆周 $y = \sqrt{1-x^2}$ 。

四 证明题 (共 2 小题, 第 1 小题 10 分, 第 2 小题 11 分, 共 21 分)

1 设 A 是 n 阶方阵, 且满足 $A^2 = E$, $|A + E| \neq 0$, 证明: $A = E$ 。

2 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $0 < f(x) < 1$, 证明: $2x - \int_0^x f(t)dt = 1$ 在 $(0, 1)$ 内只有一个实根。