暨南大學
JINAN UNIVERSITY

2022年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

招生专业与代码：070101 基础数学、070102 计算数学、070103 概率论与数理统计、070104 应用数学、070105 运筹学与控制论、071400 统计学

考试科目名称及代码：810 高等代数（B卷）

考生注意：所有答案必须写在答题纸（卷）上，写在本试题上一律不给分。

一、（15分）计算行列式 $|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$。

二、（15分）利用 $f(x)$，$g(x)$ 互素当且仅当存在多项式 $u(x)$，$v(x)$ 满足 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$，试证明：

（1）（5分）上式中有 $u(x)$，$v(x)$ 互素；

（2）（5分）若 $\deg f(x)>0$，$\deg g(x)>0$，则上式中满足 $\deg u(x)<\deg g(x)$，$\deg v(x)<\deg f(x)$ 的 $u(x)$，$v(x)$ 是唯一的；

（3）（5分）若 $(f(x),g(x))=(f(x),h(x))=1$，则 $(f(x),g(x)h(x))=1$。

三、（20分）设数域 K 上的线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2 \end{cases},$$

讨论 λ 取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？在方程组有无穷多解时，试用其导出组的基础解系表示其全部解。

四、（20 分）若矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&6&a\\b&1&-5\\1&2&-6\end{pmatrix}$ 满足 $\operatorname{rank}(A+E)=1$，求 a，b 及矩阵 A 的初等因子和 Jordan 标准形。

五、（20 分）设 $A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}$，求正交矩阵 T，使得 T^TAT 是对角矩阵。

六、（20 分）A，C 是 n，m 阶实方阵，B 是 $n\times m$ 阶实矩阵，并且 $\begin{pmatrix}A&B\\B^T&C\end{pmatrix}$ 是正定矩阵。证明：$\det\begin{pmatrix}A&B\\B^T&C\end{pmatrix}\le\det(A)\cdot\det(C)$，且等号成立等且仅当 $B=0$。

七、（20 分）用 J 表示元素全为 1 的 n 阶方阵，$n\ge2$。设 $f(x)=a+bx$（$b\ne0$）是有理数域 Q 上的一元多项式，令 $A=f(J)$。

(1)（10 分）求 J 的全部特征值、全部特征向量、所有特征子空间；

(2)（10 分）A 是否可以对角化？如果可以对角化，求出有理数域 Q 上的一个可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，并且写出这个对角矩阵。

八、（20 分）若 n 阶方阵 A，B 相似且 $A^2=A$，

（1）（8 分）A，B 的迹有何关系；

（2）（6 分）A 的秩与 $B-E$ 的秩相加，写出所有可能得到的值；

（3）（6 分）若 $(A+B)^2=A+B$，则 AB 是否一定等于 0。